

Diagramy Murphy'ego w ocenie dokładności prognoz zapasów

Joanna Bruzda, Jakub Wojtasik

XXXIX Ogólnopolska Konferencja im. Prof. Władysława Bukietyńskiego 'Metody i zastosowania badań operacyjnych', Będlewo, 24-26 października 2021r.

Plan prezentacji

- 1 Diagramy Murphy'ego w ocenie prognoz
- 2 Wskaźnik dostępności w wersji krótkookresowej
- 3 Ujawnialność funkcjonatów K
- 4 Diagramy Murphy'ego w ocenie prognoz zapasów: $n = 1$
- 5 Diagramy Murphy'ego w ocenie prognoz zapasów: $n > 1$
- 6 Analiza symulacyjna
- 7 Podsumowanie



Zgodność, ścisła zgodność, diagram Murphy'ego

Strict consistency opens the way to meaningful forecast comparison, but is also important in regression and M-estimation [Fissler, Ziegel, 2019]

Ścisła zgodność funkcji kosztu oznacza, że poprawnie wyspecyfikowany model będzie średnio rzecz biorąc oceniony wyżej od modelu wyspecyfikowanego niepoprawnie. Zgodność jest relaksującą ścisłej zgodności.

Diagramy Murphy'ego pozwalają na porównywanie prognoz za pomocą elementarnych funkcji skoringowych zgodnych względem zadanego funkcjonału. Dowolna zgodna funkcja kosztu dla prognoz ma jednoznaczną reprezentację za pomocą tych funkcji.

Wskaźnik dostępności w wersji krótkookresowej

$$1 - E \frac{(Y - K)^+}{Y} = \tau, \quad (1)$$

gdzie Y to popyt w cyklu zapasów/okresie planu, K to poszukiwany poziom decyzyjny (granica uzupełniania zapasów lub wielkość produkcji/zamówienia), a τ jest wymaganym poziomem obsługi.

Jeśli okres przeglądu dotyczącego poziomu obsługi jest wielokrotnością długości cyklu zapasów, otrzymujemy:

$$1 - E \frac{(Y_1 - K)^+ + (Y_2 - K)^+ + \dots + (Y_n - K)^+}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} = \tau. \quad (2)$$

Zastosowania

- Zarządzanie zapasami w systemie przeglądu okresowego z granicą uzupełniania.
- Planowanie produkcji przy warunku dotyczącym poziomu wskaźnika dostępności towaru (planowanie w oknach przesuwanych lub ustalonych, z zamrażaniem planu produkcji lub bez zamrażania planu produkcji)
- Realizacja długookresowych umów o poziomie obsługi (ang. *Service Level Agreements*) przy systematycznej ocenie za pomocą karty oceny dostawcy

Twierdzenie 1 (Ujawialność)

Niech \mathbf{F} będzie klasą rozkładów na półosi dodatniej takich, że $E\left[\frac{1}{Y}\right] < \infty$, a $T : \mathbf{F} \rightarrow R^+$ funkcjonałem zdefiniowanym zgodnie z równaniem:

$$1 - E\left[\frac{[Y - T(Y)]^+}{Y}\right] = \tau$$

dla ustalonego $\tau \in (0, 1)$. Wówczas funkcja $L : R^+ \times R^+ \rightarrow R$ postaci:

$$L(y, x) = \begin{cases} \frac{x\phi'(x) - \phi(x)}{x} - \tau\phi'(x) + a(y) & \text{for } y \geq x, \\ \frac{y\phi'(x) - \phi(y)}{y} - \tau\phi'(x) + a(y) & \text{for } y < x, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie ϕ jest ściśle wypukła z subgradientem ϕ' i taka, że $E\left[\frac{\phi(Y)}{Y}\right]$ istnieje i jest skończona, jest ściśle zgodna względem T .

Twierdzenie 2 (Ujawialność - cd.)

Niech \mathbf{F} będzie klasą rokładów n -wymiarowych o współrzędnych zdefiniowanych na półosi dodatniej spełniających warunek: $E \left[\frac{Y_i}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} \right] < \infty$ dla każdego i , a $T : \mathbf{F} \rightarrow R^+$ funkcjonałem zdefiniowanym zgodnie z równaniem (2) dla ustalonego $\tau \in (0, 1)$. Wówczas funkcja $L : \times_{j=1}^{n+1} R^+ \rightarrow R$ postaci:

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = (1 - \tau)\phi'(x) + \frac{\{\phi'(x)(x - y_1) - [\phi(x) - \phi(y_1)]\}1_{\{y_1 \geq x\}} + \dots + \{\phi'(x)(x - y_n) - [\phi(x) - \phi(y_n)]\}1_{\{y_n \geq x\}}}{y_1 + \dots + y_n} + a(y_1, \dots, y_n),$$

gdzie ϕ jest ściśle wypukła i taka, że $E \left[\frac{\phi(Y_i)}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} \right]$ istnieje i jest skończona dla każdego i , jest ściśle zgodna względem T .

Przykładowe funkcje straty

$$L(y, x) = \begin{cases} \frac{(y-x)^2}{y} + 2(1-\tau)(x-y) & \text{dla } y \geq x, \\ 2(1-\tau)(x-y) & \text{dla } y < x \end{cases} \quad (4)$$

dla $\phi(x) = x^2$.

$$L^*\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} \frac{x}{y} - \tau \left[\log\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \right] & \text{dla } y \geq x, \\ (1-\tau) \left[\log\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \right] & \text{dla } y < x \end{cases} \quad (5)$$

dla $\phi(x) = x \log(x)$.

Przykładowe funkcje straty - cd.

$$\begin{aligned}
 L(y_1, y_2, \dots, y_n, x) &= \\
 &= 2(1 - \tau) \left[x - \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \right] \\
 &+ \frac{(y_1 - x)^2 1_{\{y_1 \geq x\}} + (y_2 - x)^2 1_{\{y_2 \geq x\}} + \dots + (y_n - x)^2 1_{\{y_n \geq x\}}}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}
 \end{aligned} \tag{6}$$

przy podstawieniu $\phi(x) = x^2$.

Problem: Decydent nie specyfikuje swojej funkcji straty - posługuje się założeniem o poziomie obsługi.

Diagramy Murphy'ego

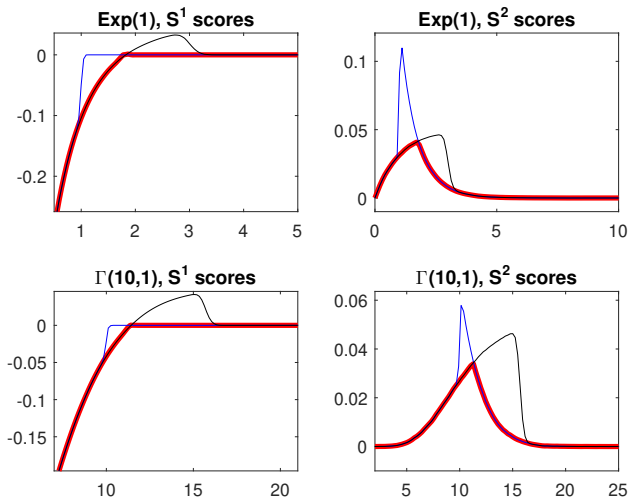
$$S_{\theta}^1(y, x) = \begin{cases} \frac{\theta}{y} - \tau & \text{dla } \theta < \min\{x, y\}, \\ 1 - \tau & \text{dla } y \leq \theta < x, \\ 0 & \text{dla } x \leq \theta, \end{cases} \quad (7)$$

oraz

$$S_{\theta}^2(y, x) = \begin{cases} \tau - \frac{\theta}{y} & \text{dla } x \leq \theta < y, \\ 1 - \tau & \text{dla } y \leq \theta < x, \\ 0 & \text{w p. w.,} \end{cases} \quad (8)$$

gdzie $\theta \in R^+$. W obu przypadkach $\phi(x) = (x - \theta)^+$.

Diagramy Murphy'ego, $\tau = 0.95$



Twierdzenie 3a (Reprezentacja)

Każda funkcja postaci:

$$L^1(y, x) = \begin{cases} \frac{x\phi'(x) - \phi(x)}{y} - \tau\phi'(x) + \frac{\phi(0)}{y} + \tau\phi'(0) & \text{dla } y \geq x, \\ \frac{y\phi'(x) - \phi(y)}{y} - \tau\phi'(x) + \frac{\phi(0)}{y} + \tau\phi'(0) & \text{dla } y < x, \end{cases}$$

gdzie ϕ jest wypukła, a ϕ' jest jej lewostronną pochodną, posiada jednoznaczną reprezentację postaci:

$$L^1(y, x) = \int_0^\infty S_\theta^1(y, x) dH(\theta), \quad (y, x) \in R^+ \times R^+,$$

gdzie H jest miarą nieujemną. Miara H jest taka, że $dH(\theta) = d\phi'(\theta)$ dla $\theta \in R^+$.

Twierdzenie 3b (Reprezentacja cd.)

Każda funkcja postaci:

$$L^2(y, x) = (1-\tau)[\phi'(x) - \phi'(y)] + \frac{\phi'(x)(x-y) - [\phi(x) - \phi(y)]}{y} \mathbf{1}_{\{y \geq x\}}$$

gdzie ϕ jest wypukła, a ϕ' jest jej lewostronną pochodną, posiada jednoznaczny reprezentację postaci:

$$L^2(y, x) = \int_0^\infty S_\theta^2(y, x) dH(\theta), \quad (y, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

gdzie H jest miarą nieujemną. Miara H jest taka, że $dH(\theta) = d\phi'(\theta)$ dla $\theta \in \mathbb{R}^+$.

Diagramy Murphy'ego, przypadek wielowymiarowy

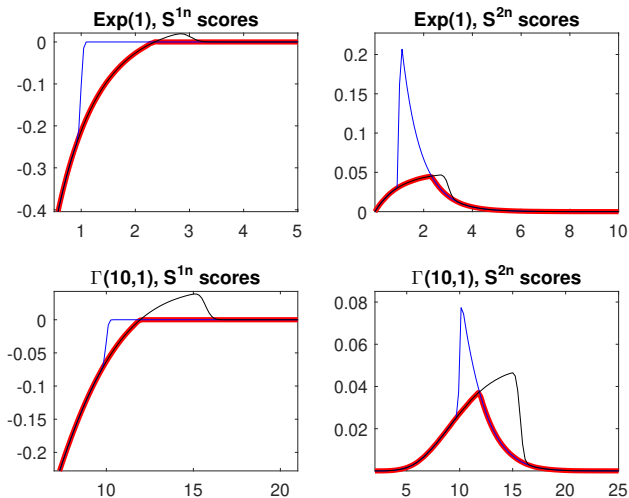
$$S_{\theta}^{1n}(y_1, \dots, y_n, x) = \left[(1 - \tau) - \frac{(y_1 - \theta)^+ + \dots + (y_n - \theta)^+}{y_1 + \dots, y_n} \right] \mathbf{1}_{\{x > \theta\}} \quad (9)$$

oraz

$$S_{\theta}^{2n}(y_1, \dots, y_n, x) = (1 - \tau) \mathbf{1}_{\{x > \theta\}} + \frac{(y_1 - \theta)^+ + \dots + (y_n - \theta)^+}{y_1 + \dots, y_n} \mathbf{1}_{\{x \leq \theta\}} - \frac{1 - \tau}{n} \left[\mathbf{1}_{\{y_1 \geq \theta\}} + \dots + \mathbf{1}_{\{y_n \geq \theta\}} \right] \quad (10)$$

gdzie $\theta \in R^+$.

Diagramy Murphy'ego, przypadek wielowymiarowy



Twierdzenie 4a - 4b analogicznie

Każda funkcja postaci:

$$L^{1n}(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = \frac{(1 - \tau)\phi'(x) + \{\phi'(x)(x - y_1) - [\phi(x) - \phi(y_1)]\}1_{\{y_1 \geq x\}} + \dots + \{\phi'(x)(x - y_n) - [\phi(x) - \phi(y_n)]\}1_{\{y_n \geq x\}}}{y_1 + \dots + y_n} + \tau\phi'(0) - \frac{[\phi(y_1) - \phi(0)] + \dots + [\phi(y_n) - \phi(0)]}{y_1 + \dots + y_n},$$

gdzie ϕ jest wypukła, a ϕ' jest jej lewostronną pochodną, posiada jednoznaczną reprezentację postaci:

$$L^{1n}(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = \int_0^\infty S_\theta^{1n}(y_1, y_2, \dots, y_n, x) dH(\theta), \quad (y_1, y_2, \dots,$$

gdzie H jest miarą nieujemną. Miara H jest taka, że $dH(\theta) = d\phi'(\theta)$ dla $\theta \in R^+$.

Empiryczne diagramy Murphy'ego

Empiryczne diagramy Murphy'ego są to wykresy funkcji postaci:

$$\theta \longrightarrow s_j(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T S_{\theta}^l(y_i, x_{ij}), \quad j = 1, \dots, m, l = 1, 2, \quad (11)$$

gdzie m jest liczbą porównywanych metod prognozowania, T jest liczbą prognoz z każdej metody, θ są wartościami pomiędzy 0 i $\max\{x_{ij}; i = 1, \dots, T, j = 1, \dots, m\}$ w przypadku funkcji elementarnych (7), a w przypadku funkcji (8) – pomiędzy $\min\{x_{ij}, y_i; i = 1, \dots, T, j = 1, \dots, m\}$ i $\max\{x_{ij}, y_i; i = 1, \dots, T, j = 1, \dots, m\}$.

Empiryczne diagramy Murphy'ego - cd.

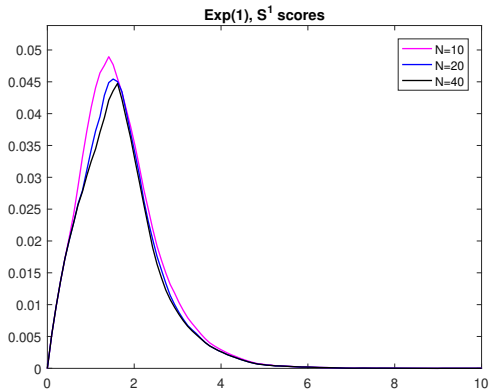
W przypadku wielowymiarowym definiujemy:

$$\theta \longrightarrow s_j^n(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T S_{\theta}^l(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}, x_{ij}), \quad j = 1, \dots, m, l = 1, 2, \quad (12)$$

gdzie m i T są jak poprzednio. Przy wyznaczaniu (9) parametr indeksujący θ przyjmuje takie same wartości jak w przypadku (7), natomiast wykreślając (10) wybieramy punkty pomiędzy $\min\{y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}; i = 1, \dots, T\}$ i $\max\{y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}; i = 1, \dots, T\}$.

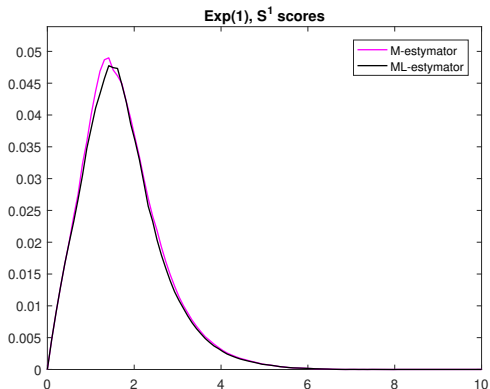
Ilustracja symulacyjna - rozkład wykładniczy

Diagramy Murphy'ego można wykorzystać do porównywania własności estymatorów (przypadek M-estymacji)



Ilustracja symulacyjna - cd.

Porównywanie metod estymacji ($N = 10$)



Podsumowanie

- Diagramy Murphy'ego jako rozwiązanie zadania oceny prognoz nie wymagają specyfikacji funkcji kosztu decydenta (prognozy przeznaczane dla wielu użytkowników, brak funkcji straty lub niepewność co do jej postaci).
- Mogą być podstawą testów jednakowej zdolności predyktywnej, a statystyka testowa może być dowolną funkcją trajektorii z diagramu.
- Diagramy Murphy'ego posiadają interpretacje ekonomiczne, które powinny być pomocne w wyborze lepszych predyktorów, gdy dominacje na diagramach nie są jednoznaczne.
- Można zaproponować ich zastosowanie również do oceny własności estymatorów.