



**UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU**

Wydział Nauk Ekonomicznych
i Zarządzania

Witold Orzeszko

Nieliniowe zależności między ceną ropy naftowej a kursami walutowymi

Metody i zastosowania badań operacyjnych (MZBO 2021), 24-26.10.2021 r.



Plan prezentacji

- ⊙ Motywacje
- ⊙ Testy nieliniowej przyczynowości w sensie Grangera
- ⊙ Model SVR
- ⊙ Badanie empiryczne:
 - testowanie nieliniowej przyczynowości między kursami walutowymi i ceną ropy naftowej
 - prognozowanie za pomocą modelu SVR



Motywacje

- ⊙ Istnienie teoretycznych przesłanek uzasadniających istnienie relacji między kursami walutowymi a ceną ropy naftowej (w obu kierunkach).
- ⊙ Poszukiwanie nowych (lepszyc) narzędzi identyfikacji i prognozowania (nieliniowych) zależności w zakresie procesów finansowych.
- ⊙ Obiecujące wyniki zastosowania uczenia maszynowego do analizy i prognozowania finansowych i ekonomicznych szeregów czasowych.



Przyczynowość w sensie Grangera - definicja

Def. (Granger, 1980): X_t nie jest przyczyną Y_t w sensie Grangera, jeśli:

$$F(Y_t | (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots; Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)) = F(Y_t | (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)), \quad (1)$$

gdzie:

$\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ - procesy stacjonarne w węższym sensie,

F - dystrybuanta warunkowa zmiennej Y_t .

Oznaczenie przyczynowości: $X \rightarrow Y$.



Przyczynowość w sensie Grangera - uwagi

1. Definicja jest nieoperatywna (nieskończona liczby przeszłych wartości procesów).

Modyfikacja:

$$F(Y_t | (X_{t-1}, \dots, X_{t-lx}; Y_{t-1}, \dots, Y_{t-ly})) = F(Y_t | (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-ly})), \quad (2)$$

dla ustalonych opóźnień $lx \geq 1$ i $ly \geq 1$.

2. Inne uproszczenia:

- a) skupienie się na równości wartości oczekiwanych,

- b) ograniczenie badanych zależności do liniowych (model VAR).



Przyczynowość w sensie Grangera - uwagi

3. Jeśli $X \rightarrow Y$, to możliwe jest prognozowanie procesu Y za pomocą przeszłych wartości procesu X .
4. Operatywne podejście do nieliniowej przyczynowości: koncepcja Baeka i Brocka (1992), oparta na całkach korelacyjnych.



Testy nieliniowej przyczynowości w sensie Grangera

Testy:

- ⊙ Hiemstry i Jonesa (1994),
- ⊙ Diksa i Panchenki (2005).

Uwagi:

- ⊙ identyfikują wszystkie rodzaje zależności (liniowe i nieliniowe),
- ⊙ są nieparametryczne.



Metoda Wektorów Nośnych

Metoda Wektorów Nośnych (*Support Vector Machine*; Vapnik, 1995) – narzędzie uczenia maszynowego, stosowane do:

- ⦿ klasyfikacji (*Support Vector Classification* – SVC, SVM),
- ⦿ regresji (*Support Vector Regression* – SVR).



Metoda Wektorów Nośnych – zalety i wady

⊙ Zalety:

- Rozwiązuje problemy liniowe, jak i nieliniowe,
- Wysokie dopasowanie do danych, z możliwością ograniczenia efektu przeuczenia modelu,
- Odporność na występowanie szumu w zbiorze uczącym,
- Odporność na małą liczbę danych i dużą liczbę atrybutów.

⊙ Wady:

- Trudność w interpretacji modelu (*black box*).



Model SVR – istota

Model regresji:

$$y = r(\mathbf{x}) + \delta, \quad (3)$$

gdzie: $r(\mathbf{x})$ funkcja regresji, y – zmienna zależna, \mathbf{x} – wektor regresorów, δ – składnik losowy.

Cel: wyznaczenie funkcji aproksymującej $f(\mathbf{x})$ tak, aby jej wartości nie różniły się o więcej niż ε od obserwacji y_t i jednocześnie nie była nadmiernie dopasowana do zbioru treningowego $\{(\mathbf{x}_t, y_t)\}_{t=1, \dots, n}$.



Model SVR – konstrukcja

Wektory \mathbf{x} przekształca się poprzez odwzorowania $\varphi_i(\mathbf{x})$ do przestrzeni o większym wymiarze – d , a następnie wyznacza się:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \omega_i \varphi_i(\mathbf{x}) + b, \quad (4)$$

gdzie ω_i oraz b są parametrami modelu.

W procesie wyznaczania parametrów stosuje się funkcję straty:

$$L_\varepsilon(y, f(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & , \quad |y - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon, \\ |y - f(\mathbf{x})| - \varepsilon, & \text{w p. w.}, \end{cases} \quad (5)$$

według której błędy poniżej poziomu ε nie są penalizowane.



Estymacja parametrów modelu SVR

Zadanie programowania kwadratowego – minimalizacja funkcjonau:

$$\Phi(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + C \sum_{t=1}^n (\xi_t + \xi_t^*), \quad (6)$$

gdzie: $C > 0$; ξ_t, ξ_t^* – nieujemne zmienne spełniające warunki:

$$y_t - f(\mathbf{x}_t) \leq \varepsilon + \xi_t^*, \quad (7)$$

$$f(\mathbf{x}_t) - y_t \leq \varepsilon + \xi_t, \quad (8)$$

dla każdego $t = 1, 2, \dots, n$.

Problem praktyczny: duża liczba optymalizowanych zmiennych, złożoność obliczeniowa.



Estymacja parametrów modelu SVR – problem dualny

Istota: Zastosowanie funkcji jądrowych (*kernel trick*):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{n_{SV}} (\alpha_t - \alpha_t^*) K(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}); \quad 0 \leq \alpha_t \leq C, \quad 0 \leq \alpha_t^* \leq C, \quad (9)$$

gdzie: α_t i α_t^* – mnożniki Lagrange'a, n_{SV} – liczba wektorów nośnych, K – funkcja jądrowa, spełniająca warunek:

$$K(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}_t). \quad (10)$$

Zaleta: Nie trzeba wprost wyznaczać postaci analitycznej funkcji φ_i (wyznacza się tylko iloczyn skalarny wektora $\varphi(\mathbf{x})$), co znacząco redukuje złożoność obliczeniową algorytmu.



SVR – najczęściej stosowane funkcje jądrowe

- ⊙ Liniowa (iloczyn skalarny): $K(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_t^T \mathbf{x}$,
- ⊙ RBF: $K(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}) = \exp(-\gamma \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}\|^2)$,
- ⊙ Wielomianowa: $K(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}) = (1 + \mathbf{x}_t^T \mathbf{x})^p$; $p = 2, 3, \dots$

Zastosowanie jądra liniowego prowadzi do liniowej SVR, a pozostałych – do nieliniowej SVR.



Badanie empiryczne – cele badania

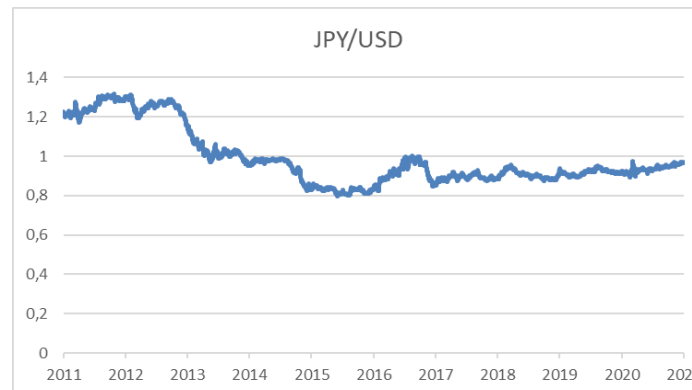
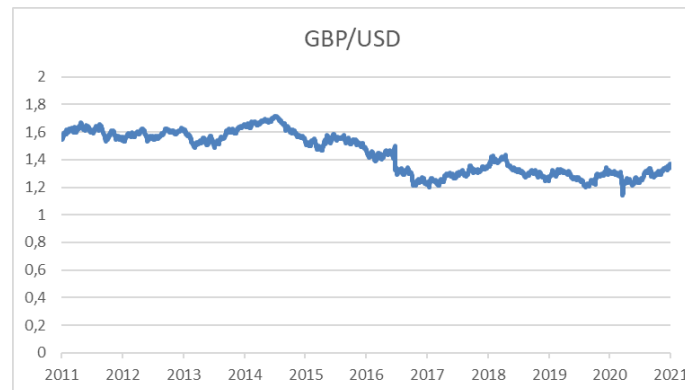
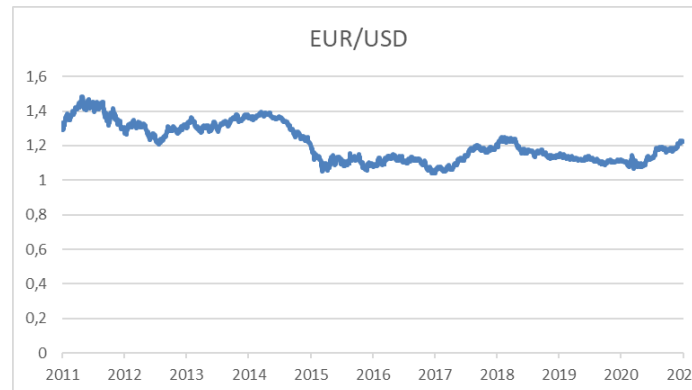
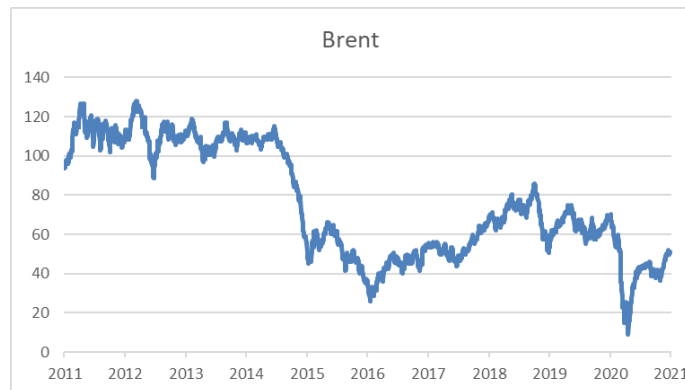
- 1) Detekcja nieliniowej przyczynowości (w obu kierunkach) między kursami najważniejszych na rynku Forex par walutowych: EUR/USD, GBP/USD, JPY/USD a ceną (spot) ropy naftowej Brent.
- 2) Zbadanie, czy zidentyfikowane zależności są stabilne w czasie.
- 3) Weryfikacja przydatności modelu SVR do prognozowania kursów par walutowych na podstawie opóźnionych cen ropy naftowej, i na odwrót.



Badanie empiryczne – szeregi czasowe

- ⊙ Dane dzienne z okresu 3.01.2011 - 31.12.2020.
- ⊙ Podział na dwa podokresy:
 - „Okres 1” – 3.01.2011 - 31.12.2015
 - „Okres 2” – 4.01.2016 - 31.12.2020
- ⊙ Logarytmiczne stopy zmian:

$$r_t = 100\ln(p_t/p_{t-1})$$





Wyniki detekcji nieliniowej przyczynowości – EUR/USD i Brent

Opóźnienie $l_x=l_y$	1	2	3	4	5	6	7	8
Brent→EUR/USD								
Okres 1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Okres 2	0,074	0,255	0,148	0,227	0,253	0,323	0,289	0,282
EUR/USD→Brent								
Okres 1	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Okres 2	0,080	0,067	0,392	0,294	0,484	0,471	0,565	0,574

Wartości p testu Diksa-Panchenki



Wyniki detekcji nieliniowej przyczynowości – GBP/USD i Brent

Opóźnienie $l_x=l_y$	1	2	3	4	5	6	7	8
Brent → GBP/USD								
Okres 1	0,169	0,005	0,007	0,001	0,001	0,000	0,000	0,001
Okres 2	0,005	0,040	0,019	0,003	0,002	0,001	0,001	0,002
GBP/USD → Brent								
Okres 1	0,072	0,003	0,013	0,004	0,007	0,016	0,024	0,015
Okres 2	0,031	0,064	0,408	0,179	0,252	0,158	0,027	0,018

Wartości p testu Diksa-Panchenki



Wyniki detekcji nieliniowej przyczynowości – JPY/USD i Brent

Opóźnienie $l_x=l_y$	1	2	3	4	5	6	7	8
Brent→JPY/USD								
Okres 1	0,519	0,700	0,911	0,936	0,969	0,823	0,453	0,334
Okres 2	0,033	0,310	0,267	0,153	0,210	0,371	0,629	0,556
JPY/USD→Brent								
Okres 1	0,510	0,848	0,873	0,476	0,283	0,253	0,200	0,107
Okres 2	0,004	0,000	0,000	0,001	0,003	0,016	0,021	0,024

Wartości p testu Diksa-Panchenki



Prognozowanie – struktura modeli SVR

1) Autoregresyjne:

$$y_{t+1} = f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-l_y+1}), \quad (11)$$

gdzie: y_t - kurs walutowy [cena Brent].

2) Z dodatkowymi regresorami:

$$y_{t+1} = f(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-l_y+1}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-l_x+1}), \quad (12)$$

gdzie: x_t - cena Brent [kurs walutowy], $l_x = l_y$.



Prognozowanie – opóźnienia zmiennych w modelach SVR

Modelowana relacja	opóźnienia $l_x=l_y$
Brent → EUR/USD	3
EUR/USD → Brent	2
Brent → GBP/USD	6
GBP/USD → Brent	8
Brent → JPY/USD	8
JPY/USD → Brent	8



Prognozowanie – hiperparametry modeli SVR

1) Dwa typy jądra:

- liniowe
- RBF

2) Wyznaczenie hiperparametrów ε , C i γ (w RBF):

- metoda 5-krotnej walidacji krzyżowej (minimalizacja MSE),
- przeszukiwanie parametrów – optymalizacja bayesowska.



Prognozowanie – estymacja modeli i wyznaczanie prognoz

- 1) Modele szacowane na podstawie przesuwanego okna obejmującego obserwacje z trzech pierwszych lat obu badanych okresów.
- 2) Prognozy na jeden okres w przód (dla każdej obserwacji z dwóch ostatnich lat badanych okresów).
- 3) Dla każdej prognozy model szacowany na nowo + każdorazowa optymalizacja hiperparametrów.
- 4) Kryterium oceny modeli – miary MAE i MSE.



Prognozowanie – oznaczenie modeli

- 1) Autoregresyjny SVR z jądrem liniowym (ozn. SVR_ar_lin),
- 2) Autoregresyjny SVR z jądrem RBF (ozn. SVR_ar_rbf),
- 3) SVR z autoregresją i zmiennymi objaśniającymi, z jądrem liniowym (ozn. SVR_reg_lin),
- 4) SVR z autoregresją i zmiennymi objaśniającymi, z jądrem RBF (ozn. SVR_reg_rbf),
- 5) Model benchmarkowy – biały szum WN (uśrednione przeszłe obserwacje z okna estymacyjnego).



Wyniki prognozowania

Modelowana relacja	Okres	WN		SVR_ar_lin		SVR_ar_rbf		SVR_reg_lin		SVR_reg_rbf	
		MAE	MSE	MAE	MSE	MAE	MSE	MAE	MSE	MAE	MSE
Brent → EUR/USD	Okres 1	0,430	0,352	0,434	0,363	0,431	0,352	0,431	0,353	0,431	0,353
	Okres 2	0,304	0,162	0,308	0,164	0,303	0,161	0,313	0,180	0,303	0,161
EUR/USD → Brent	Okres 1	1,353	3,924	1,359	3,943	1,359	3,943	1,359	3,943	1,359	3,943
	Okres 2	2,512	27,948	2,513	27,616	2,501	27,749	2,519	28,540	2,515	27,934
Brent → GBP/USD	Okres 1	0,332	0,202	0,332	0,203	0,331	0,202	0,345	0,217	0,331	0,202
	Okres 2	0,453	0,389	0,452	0,389	0,453	0,388	0,466	0,450	0,455	0,391
GBP/USD → Brent	Okres 1	1,353	3,924	1,360	3,972	1,361	3,929	1,371	4,041	1,361	3,958
	Okres 2	2,512	27,948	2,526	27,925	2,529	28,096	2,558	29,170	2,518	27,987
Brent → JPY/USD	Okres 1	0,358	0,250	0,360	0,256	0,360	0,252	0,368	0,269	0,359	0,251
	Okres 2	0,303	0,221	0,326	0,341	0,305	0,222	0,323	0,264	0,304	0,222
JPY/USD → Brent	Okres 1	1,353	3,924	1,369	3,997	1,353	3,933	1,358	3,962	1,356	3,944
	Okres 2	2,512	27,948	2,504	27,846	2,717	41,748	2,513	27,834	2,599	30,809



Wnioski – nieliniowa przyczynowość

- 1) W okresie 1 silna dwukierunkowa przyczynowość Brent \leftrightarrow EUR/USD oraz Brent \leftrightarrow GBP/USD.

W okresie 2 dwukierunkowa przyczynowość Brent \leftrightarrow GBP/USD, choć wskazanie testu dot. kierunku GBP/USD \rightarrow Brent jest wyraźnie słabsze niż w okresie 1. Przyczynowość między Brent i EUR/USD stała się nieistotna statystycznie (w obie strony).

- 2) Inaczej w przypadku JPY/USD: w okresie 1 brak przyczynowości w obu kierunkach a w okresie 2 silne wskazanie na przyczynowość JPY/USD \rightarrow Brent i słabsze na Brent \rightarrow JPY/USD.



Wnioski – prognozowanie

- 3) Wszystkie zastosowane modele prognostyczne dały prognozy o zbliżonej dokładności, tzn.:
- modele SVR nie wykazały wyższości nad WN,
 - modele z regresorami nie wykazały wyższości nad modelami autoregresyjnymi,
 - wybór jądra nie wpłynął na moc prognostyczną modeli SVR.



Dziękuję za uwagę

Dr hab. Witold Orzeszko, prof. UMK

Katedra Zastosowań Informatyki i Matematyki w Ekonomii, UMK w Toruniu

E-mail: witold.orzeszko@umk.pl